Gabarito e resolução da prova de seleção PPGE – FURG 2019.

Estatística

Questão 1)

Resposta: letra c)

i. (FALSO)

Variáveis de interação sempre podem ser incluídas mos modelos de regressão, se isso não gerar multicolinearidade perfeita entre as variáveis $exper\ x\ gênero, exper$ e $gênero$, o que impossibilitaria a obtenção do estimador de MQO.

ii. (VERDADEIRO)

Considere o caso em que ambos tenham $exper = 0$. Para medir, se a renda média dos homens é maior do que a das mulheres, devemos olhar para o coeficiente da variável $gênero$, visto que as outras variáveis estão fixas. Tal coeficiente é significativo, pois a estatística t, será:

$$t = -\frac{0.169}{0.059} = -2.86$$

Que é maior, em módulo, do que 1.96, que é o valor crítico da normal para um nível de significância de 5% (podemos considerar a Normal pois o tamanho amostral é relativamente grande, n=487). Assim, como o sinal é negativo, isso implica que as mulheres ganham menos do que os homens em média.

A situação é reforçada para graus de experiência diferentes de zero. Neste caso, o efeito seria:

$$\{E[lnrenda|genero = 1; educ; exp] - E[lnrenda|genero = 0; educ; exp]\} =$$

$$= -0.169 - 0.009exper$$

O qual depende do nível de experiência. Note que o efeito, para qualquer nível de experiência será negativo, ou seja, a renda média dos homens é superior à das mulheres. Conforme o nível de renda vai aumentando, a renda média dos homens aumenta mais do que a das mulheres.

iii. (FALSO)

O impacto de um ano a mais de educação sobre o log da renda é para qualquer nível educacional igual a 0.004 isto que $educ$ é uma variável linear. Como $educ$ é uma variável discreta, podemos dizer que o impacto será aproximadamente igual a 0.004 x 100%=0.4%.

Questão 2)

Resposta: letra b)

i. (VERDADEIRA)

As hipóteses necessárias para serem os Melhores Estimadores Lineares Não Viesados são: Linearidade dos parâmetros, amostragem aleatória, $E(u|x) = 0$, não colinearidade perfeita e homocedasticidade. Ou seja, não é necessário que os erros sejam normalmente distribuídos para que o EMQ seja eficiente na classe dos estimadores lineares não viesados. Caso seja imposta a hipótese de normalidade dos resíduos, tem-se que o EMQ é eficiente na classe dos estimadores não viesados, não necessariamente lineares.

ii. (FALSO)

Não é necessária a hipótese de homocedasticidade.

iii. (VERDADEIRA)

O Teorema de Gauss-Markov necessita de tal hipótese na demonstração que os EMQ são eficientes.

Questão 3)

Resposta: letra e)

i. (VERDADEIRO)

O coeficiente da log do preço no verão é significativamente diferente de zero ($\frac{0.33}{0.12} > 2 > z_{0.975}, Z_{0.975}$ quantil de probabilidade de 0.025 da normal padrão). Como este coeficiente é positivo, ele faz com que a demanda seja menos preço-elátisca. Ou seja:

Elasticidade “não verão”= -0.83

Elastividade “verão”=-0.83+0.33=0.5

Logo $|\varepsilon_{verão}| < |\varepsilon_{não\ verão}|$.

ii. (FALSO)

Não é possível determinar se o preço é maior no verão ou nas outras estações, pois necessitaríamos da equação de oferta. O preço de equilíbrio é determinado justamente a partir do ponto de equilíbrio de oferta e demanda.

iii. (FALSO)

O baixo coeficiente de determinação indica que o modelo explica apenas 24% da variação da variável dependente.

Questão 4)

Resposta: letra d)

i. (VERDADEIRA)

A não colinearidade perfeita garante que o estimador existe (X'X invertível), e a ortogonalidade dos erros em relação aos regressores garante que os estimadores são não viesados.

ii. (VERDADEIRA)

Se,

$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT} = 1$

$\frac{SQR}{SQT} = 0$

Então,

$SQT = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{\beta_0 -} \dots - \widehat{\beta_3} x_3)^2 = 0.$

Logo,

$y_i = \widehat{\beta_0 +} \dots + \widehat{\beta_3} x_3$

iii. (VERDADEIRA)

Podem ser em função do viés de variável omitida.

Questão 5)

Resposta: letra d)

i. (FALSA)

Para que haja cointegração, as duas séries precisam ser integradas de mesma ordem, maior ou igual a um.

ii. (FALSA)

Pela mesma razão do item anterior.

iii. (FALSA)

Elas podem ser cointegradas, mas não necessariamente.

iv. (VERDADEIRA)

Por definição.

v. (FALSA)

Por exemplo, $y_t e\, z_t$ podem ser I(0). Mas sendo ambas I(0), elas não são cointegradas. Mas como visto no item i, elas precisam ser integradas de mesma ordem, mas maior ou igual a um.

Questão 6)

Resposta: letra c)

i. (VERDADEIRO).

Como $|\phi| < 1, Z_t$ é estacionário. Logo $E(Z_t) = E(Z_{t-1})$.Então:

$E(Z_t) = \phi E(Z_{t-1}) + \theta_0$

$E(Z_t) = \phi E(Z_t) + \theta_0$

$E(Z_t) = \frac{\theta_0}{1-\phi}$

ii. (FALSA)

Qualquer processo MA(q), q<∞, é sempre estacionário.

Note que : $Z_t = a_t - a_{t-1} = \Delta a_t$

Como a_t é um ruído branco, então Δa_t também será ruído branco e , portanto será estacionário.

iii. (VERDADEIRO)

$|\phi| < |0.8| < 1.$

Matemática

Questão 1)

Resposta: letra d)

i. **(Verdadeiro)**

$\frac{\partial Q}{\partial K} = 3K^{-1/4}L^{1/4}$ e $\frac{\partial Q}{\partial L} = K^{3/4}L^{-3/4}$

ii. **(Falso)**

$\frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = \frac{3}{4}K^{-1/4}L^{-3/4} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = \frac{3}{4}K^{-1/4}L^{-3/4}$

iii. **(Falso)**

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -\frac{3}{4}K^{3/4}L^{-7/4} \neq \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -\frac{3}{4}K^{-5/4}L^{1/4}$$

Questão 2)

Resposta: letra c)

i. **(Verdadeiro)**

$f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$
$x = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} \in [-3{,}3]$, logo a função tem duas raízes reais.

ii. **(Verdadeiro)**

$f''(x) = 6x - 6 = 0$
$x = 1 \in [-3{,}3]$, logo a função tem uma raiz real.

iii. **(Verdadeiro)**

Para analisarmos se a função é crescente ou não, temos que verificar o comportamento da $f'(x)$ nos intervalos formados a partir de suas raízes, obtidas no item i.

para $x < \frac{6-\sqrt{48}}{6}, x > \frac{6-\sqrt{48}}{6} \rightarrow f'(x) > 0$
e para $x \in \left(\frac{6-\sqrt{48}}{6}, \frac{6+\sqrt{48}}{6}\right) \rightarrow f'(x) < 0$

Logo para $x < -3 < \frac{6-\sqrt{48}}{6}$, a função é crescente.

iv. **(Verdadeiro)**

Para analisarmos se a função é côncava ou não, devemos analisar o comportamento de $f''(x)$ nos intervalos formados a partir de suas raízes, obtidas no item ii.

Para $x < 1 \ \rightarrow f''(x) < 0$
Para $x > 1 \ \rightarrow f''(x) > 0$

Logo para $x < -3 < 1, f''(x) < 0$, ou seja, f é côncava.

Questão 3)

Resposta: letra a)

i. **(Falso)**

$Max\ (x, y) = -\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + x^2y - y^2 - 3y$

As CPOs serão:
x: $-x^2 + 2xy = 0$
y: $y^2 + x^2 - 2y - 3 = 0$

$-x(x - 2y) = 0$
$x = 0\ ou\ x = 2y$

Se $x = 2y$

$5y^2 - 2y - 3 = 0$
$y *= \frac{2 \pm \sqrt{64}}{10} \rightarrow y *= 1\ ou\ y *= \frac{-6}{10}$

Logo, $x *= 2\ ou\ x *= \frac{-6}{5}$

Se $x = 0$

$y^2 - 2y - 3 = 0$
Soma=2
Produto = -3

$y *= 3\ ou\ y *= -1$

Logo, a função tem 4 pontos críticos: $(2,1)$; $\left(\frac{-6}{5}; \frac{-6}{10}\right)$; $(0,3)$; $(0,-1)$.

ii. **(Verdadeiro)**

Deve ser verificado se a função atinge um máximo menor que 15.

$$\max_{x,y} 10x + 2y - 3x^2 + xy - y^2 < 15$$

$CPOs$:
$x: 10 - 6x + y = 0$
$y: 2 + x - 2y = 0$

Resolvendo o sistema: $x* = 2; y* = 2;$

$f(x*, y*) = 20 + 4 - 12 + 4 - 4 = 12.$

Para verificarmos se este ponto é máximo global, devemos verificar se a função é côncava em todo o seu domínio, através da hessiana:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Logo, os seus menores principais líderes serão:

$|H_1| = |-6| = -6 < 0$
$|H_2| = |H| = 12 - 1 = 11 > 0$

Ou seja, eles alternam de sinal. Logo, H é negativa definida e a função é estritamente côncava. Logo, podemos dizer que:

$f(x,y) \leq 12 < 15$

Ou seja, a função atinge seu valor máximo em 12 que é menor que 15.

iii. **(Verdadeiro)**

Deve ser analisada a matriz hessiana

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}$$

$$H_{-1,2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$|H_1| = 4$

$|H_2| = |H_{-1,2}| = -16 < 0 \ \rightarrow Ponto\ de\ sela$

Questão 4)

Resposta: letra b)

i. **(Falso)**

Façamos uma transformação monotônica sobre a função objetivo para facilitar a maximização.

$\max lnx^2 + lny^2 + lnz^4 \leftrightarrow \max 2lnx + 2lny + 4lnz \overset{\div 2}{\leftrightarrow}$
$\max_{x,y,z} lnx + lny + 2lnz$

$s.t.\, 2x + y + 5z = 40$

O lagrangeano será:

$L = lnx + lny + 2lnz - \lambda(2x + y + 5z - 40)$

As CPOs serão:

$x: \frac{1}{x} - 2\lambda = 0$

$y: \frac{1}{y} - \lambda = 0$

$z: \frac{1}{z} - 5\lambda = 0$

$\lambda = \frac{1}{2x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{5z}$

$2x = y$

$5z = y$

Substituindo na restrição:

$2x + y + 5z = 40$

$y + y + 2y = 40$

$y *= 10; x *= 5; z *= 4$

$x * + y * + z *= 19$

ii. **(Verdadeiro)**

Notemos que, como a função-objetivo é crescente em todos os argumentos, então a 1ª restrição é ativa. E como queremos maximizar, todas as variáveis serão positivas.

O Lagrangeano será:

$L = \frac{8xyzw}{3} - \lambda(x + 2y + 3z + 4w - 12)]$

Assim, as CPOs serão:

$x: \frac{8}{3}yzw - \lambda = 0$
$y: \frac{8}{3}xzw - 2\lambda = 0$
$z: \frac{8}{3}xyw - 3\lambda = 0$
$w: \frac{8}{3}xyz - 4\lambda = 0$
$\lambda = \frac{8}{3}yzw = \frac{8}{6}xzw = \frac{8}{9}xyw = \frac{8}{12}xyz$

Resolvendo:

$2x = y$
$3z = x$
$4w = x$

Substituindo na restrição:
$x + x + x + x = 12$
$x *= 3, y *= \frac{3}{2}, z *= 1, w *= \frac{3}{4}$

iii. (Verdadeiro)

$\max_x \frac{yx}{1 + x^2y^2}$
$s.t.\ x \geq 0$

CPO:

$x: \frac{y}{yx} - \frac{2y^2x}{1 + y^2x^2} = 0$
$\frac{1}{x} - \frac{2y^2x}{1 + y^2x^2}$

$$2x^2y^2 = 1 + x^2y^2$$

$$x^2y^2 = 1$$
$$x* = \pm\frac{1}{y}$$

Como $y \geq 0$, e temos que ter $x \geq 0$, a solução $x = {-1}/{y}$, não convém. Substituindo $x = {1}/{y}$ de volta na função objetivo, obtemos:

$$V(y) = \frac{y\frac{1}{y}}{1 + y^2\frac{1}{y^2}} = \frac{1}{2}$$
$$V'(y) = 0$$